

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ
27 ΜΑΙΟΥ 2006

ΘΕΜΑ 1^ο**A1.** Σχολικό σελ.:253**A2.** Σχολικό σελ.:273**B.**

- a) Λάθος
- b) Σωστό
- c) Σωστό
- d) Λάθος
- e) Σωστό

ΘΕΜΑ 2^ο

A. Για κάθε $x_1, x_2 \geq 2$ με $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow 2 + (x_1 - 2)^2 = 2 + (x_2 - 2)^2 \Leftrightarrow (x_1 - 2)^2 = (x_2 - 2)^2 \Leftrightarrow x_1 - 2 = x_2 - 2$ (αφού $x_1 - 2 \geq 0, x_2 - 2 \geq 0$) $\Leftrightarrow x_1 = x_2$ άρα η f είναι "1-1".

B. Αφού η f είναι "1-1" στο $[2, +\infty)$ είναι και αντιστρέψιμη. Θέτω $y = f(x) \Leftrightarrow 2 + (x - 2)^2 = y \Leftrightarrow (x - 2)^2 = y - 2$ με $y \geq 2 \Leftrightarrow x - 2 = \pm\sqrt{y - 2} \Leftrightarrow x = 2 + \sqrt{y - 2}$ ή $x = 2 - \sqrt{y - 2} \rightarrow$ απορρίπτεται αφού $x \geq 2$ άρα $f^{-1}(x) = 2 + \sqrt{x - 2}$ με $x \geq 2$.

Γ. Έχω ότι $f(x) = x \Leftrightarrow 2 + (x - 2)^2 = x \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ ή $x = 3$. Άρα τα κοινά σημεία της C_f με την $y = x$ είναι τα $(2,2)$ και $(3,3)$. Η $C_{f^{-1}}$ έχει τα ίδια κοινά σημεία με την $y = x$ όπως και η C_f αφού $C_f, C_{f^{-1}}$ είναι συμμετρικές ως προς την $y = x$. Δηλ. τα κοινά σημεία της $C_{f^{-1}}$ με την $y = x$ είναι τα $(2,2), (3,3)$.

Δ. Έχω ότι $f(x) = f^{-1}(x) \Leftrightarrow 2 + (x - 2)^2 = 2 + \sqrt{x - 2} \Leftrightarrow (x - 2)^4 = x - 2 \Leftrightarrow (x - 2)[(x - 2)^3 - 1] = 0 \Leftrightarrow x - 2 = 0$ ή $(x - 2)^3 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ ή $(x - 2)^3 = 1 \Leftrightarrow x = 2$ ή $x = 3$.

Ομοίως για $x \geq 2$ έχουμε $f(x) \leq f^{-1}(x) \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow 2 \leq x \leq 3$ οπότε

$$\begin{aligned} E &= \int_2^3 |f(x) - f^{-1}(x)| dx = \int_2^3 [f^{-1}(x) - f(x)] dx = \int_2^3 (\sqrt{x - 2} + 2 - 2 - (x - 2)^2) dx = \\ &= \left[\frac{(x - 2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_2^3 - \left[\frac{(x - 2)^3}{3} \right]_2^3 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 3^ο

A. ι) Έχω ότι : $z_1 + z_2 + z_3 = 0 \Leftrightarrow z_1 = -z_2 - z_3$. Αρκεί να δειχθεί ότι: $|z_1 - z_2| = |z_3 - z_1| \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow |-z_2 - z_3 - z_2| = |z_3 + z_2 + z_3| \Leftrightarrow |2z_2 + z_3|^2 = |z_2 + 2z_3|^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (2z_2 + z_3) \cdot (2\bar{z}_2 + \bar{z}_3) = (z_2 + 2z_3) \cdot (\bar{z}_2 + 2\bar{z}_3) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4z_2 \cdot \bar{z}_2 + 2z_2 \cdot \bar{z}_3 + 2z_3 \bar{z}_2 + z_3 \cdot \bar{z}_3 = z_2 \bar{z}_2 + 2z_2 \bar{z}_3 + 2\bar{z}_2 z_3 + 4z_3 \bar{z}_3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4 \cdot 1 + 1 = 1 + 4 \cdot 1 \Leftrightarrow 5 = 5. \text{ Ομοίως } |z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| \text{ αν χρησιμοποιήσουμε ότι } z_2 = -z_1 - z_3.$$

ii) 1^{ος} Τρόπος:

Αρκεί να δειχθεί ότι: $|z_1 - z_2|^2 \leq 4 \Leftrightarrow |z_1 - z_2| \leq 2$ το οποίο ισχύει, αφού από τριγωνική ανισότητα έχουμε: $|z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2| = 1 + 1 = 2$

2^{ος} Τρόπος :

Στο β. θα αποδείξουμε ότι οι εικόνες των z_1, z_2, z_3 κινούνται σε ισόπλευρο τρίγωνο εγγεγραμμένο

σε κύκλο ακτίνας 1 έχουμε $|z_1 - z_2| = \lambda_3 = R\sqrt{3} = \sqrt{3}$ οπότε $|z_1 - z_2|^2 \leq 4 \Leftrightarrow \sqrt{3}^2 \leq 4 \Leftrightarrow 3 \leq 4$ ισχύει.

(ii)β

$$|z_1 - z_2|^2 \leq 4 \Leftrightarrow (z_1 - z_2) \cdot (\bar{z}_1 - \bar{z}_2) \leq 4 \Leftrightarrow z_1 \bar{z}_1 - z_1 \bar{z}_2 - z_2 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2 \leq 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -(z_1 \bar{z}_2 + \overline{z_1 \bar{z}_2}) + 2 \leq 4 \Leftrightarrow -2 \operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) \leq 2 \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) \geq -1$$

Β. Έστω M_1, M_2, M_3 οι εικόνες των μιγαδικών z_1, z_2, z_3 αντίστοιχα. Επειδή

$|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ άρα τα M_1, M_2, M_3 κινούνται στον μοναδιαίο κύκλο. Επίσης από το

$|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| = |z_3 - z_1|$ ισχύει $(M_2 M_1) = (M_3 M_2) = (M_1 M_3)$ δηλαδή το $M_1 M_2 M_3$ είναι

κορυφές ισοπλεύρου τριγώνου και λόγω των $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$, είναι

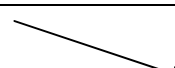
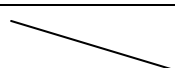
$(OM_1) = (OM_2) = (OM_3) = 1$, άρα το $M_1 M_2 M_3$ είναι εγγεγραμμένο στον μοναδιαίο κύκλο.

ΘΕΜΑ 4^ο

Α. Περιορισμοί: $\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \quad D_f = (0,1) \cup (1,+\infty)$

$$f'(x) = \frac{x-1-x-1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x} = \frac{-2}{(x-1)^2} - \frac{1}{x} = \frac{-2x - (x-1)^2}{x \cdot (x-1)^2} = \frac{-2x - x^2 + 2x - 1}{x \cdot (x-1)^2} = -\frac{x^2 + 1}{x \cdot (x-1)^2} < 0$$

, $x \in (0,1) \cup (1,+\infty)$.

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	-	-
$f(x)$			

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{x+1}{x-1} - \ln x \right] = +\infty \quad (\text{αφού } \lim_{x \rightarrow 0^+} (-\ln x) = +\infty)$$

$$\text{Επίσης } \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{x+1}{x-1} - \ln x \right) = -\infty \quad (\text{επειδή } \lim_{x \rightarrow 1^-} (x-1) = 0, \quad x-1 < 0, \lim_{x \rightarrow 1^-} (x+1) = 2 > 0 \text{ άρα}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{x+1}{x-1} \right) = -\infty).$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{x+1}{x-1} - \ln x \right) = +\infty \quad (\text{επειδή } \lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1) = 0, \quad x-1 > 0, \lim_{x \rightarrow 1^+} (x+1) = 2 \text{ άρα } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+1}{x-1} = +\infty)$$

$$\text{Τέλος } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{x-1} - \ln x \right) = -\infty \text{ (αφού } \lim_{x \rightarrow +\infty} (-\ln x) = -\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{x-1} \right) = 1)$$

άρα το Σ.Τ. είναι το $(-\infty, +\infty)$

Β. Αφού η f συνεχής στο $(0,1)$ και σε αυτό το σύνολο τιμών (Σ.Τ.) είναι το $(-\infty, +\infty)$ υπάρχει $x_0 \in (0,1): f(x_0) = 0$ επειδή f γνησίως φθίνουσα στο $(0,1)$ τότε το x_0 είναι μοναδικό στο διάστημα $(0,1)$. Ομοίως η f συνεχής στο $(1,+\infty)$ και σε αυτό Σ.Τ. $= (-\infty, +\infty)$ υπάρχει $x_1 \in (1,+\infty): f(x_1) = 0$ επειδή η f γνησίως φθίνουσα στο $(1,+\infty)$ τότε το x_1 είναι μοναδικό στο $(0,1)$. Οπότε η $f(x) = 0$ έχει δύο ακριβώς ρίζες.

$$\Gamma. g'(x) = \frac{1}{x}, h'(x) = e^x$$

$$\varepsilon\phi_A: y - \ln \alpha = \frac{1}{\alpha}(x - \alpha) \Leftrightarrow y = \frac{1}{\alpha}x + \ln \alpha - 1$$

$$\varepsilon\phi_B: y - e^\beta = e^\beta(x - \beta) \Leftrightarrow y = e^\beta x + e^\beta - e^\beta \cdot \beta$$

$$\text{ΠΡΕΠΕΙ} \begin{cases} \frac{1}{\alpha} = e^\beta \\ \ln \alpha - 1 = e^\beta - e^\beta \cdot \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -\ln \alpha \\ \ln \alpha - 1 = \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha} \cdot (-\ln \alpha) \end{cases}$$

$$\text{τότε } \alpha \cdot \ln \alpha - \alpha = 1 + \ln \alpha \Leftrightarrow 1 + \ln \alpha - \alpha \ln \alpha + \alpha = 0 \Leftrightarrow -\ln \alpha(\alpha - 1) + \alpha + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{matrix} \alpha \neq 1 \\ \Leftrightarrow \end{matrix} \text{(αφού αν } \alpha = 1, 0+2=0 \Leftrightarrow 2=0 \text{ αδύνατο)} \frac{\alpha+1}{\alpha-1} - \ln \alpha = 0 \Leftrightarrow f(\alpha) = 0$$

Δ. Αφού πρώτον, το $A(\alpha, \ln \alpha)$ είναι το σημείο επαφής με την C_g της κοινής εφαπτομένης των C_g, C_h και δεύτερο το α είναι ρίζα της $f(x) = 0$ στηριζόμενοι στο προηγούμενο ερώτημα στο οποίο η $f(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες στο $(0,1) \cup (1,+\infty)$, τότε θα υπάρχουν δύο ακριβώς τέτοια σημεία A , οπότε θα υπάρχουν δύο ακριβώς κοινές εφαπτόμενες.

(Με διαφορετική διατύπωση: Στο προηγούμενο ερώτημα έχειδειχθεί ότι οι εφαπτομένες των C_g, C_h ταυτίζονται σε εκείνα τα σημεία στα οποία οι τετμημένες είναι ρίζες της $f(x) = 0$.

Γνωρίζοντας δε ότι η $f(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες, άρα και οι C_g, C_h έχουν ακριβώς δύο κοινές εφαπτομένες)

ΜΙΧΑΛΗΣ ΜΠΑΤΖΑΚΑΣ
ΓΙΑΝΗΣ ΠΕΡΤΟΠΟΥΛΟΣ
ΣΤΑΥΡΟΣ ΒΑΣΙΛΕΙΟΥ
ΠΕΤΡΟΣ ΒΑΣΙΛΕΙΟΥ